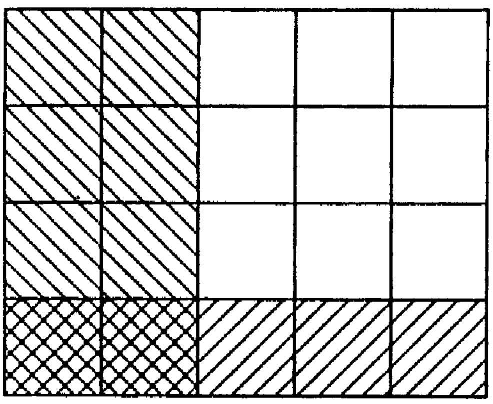
Struktur und Genese mathematischen Wissens als Leitlinie für den Unterricht

Lisa Hefendehl-Hebeker

Ein einleuchtendes didaktisches Prinzip fordert, dass Mathematikunterricht an den natürlichen erkenntnistheoretischen Prozessen der Erschaffung und Anwendung von Mathematik ausgerichtet sein sollte [1]. Was aber zeichnet solche natürlichen Prozesse aus und welche Leitlinien für die Unterrichtsgestaltung kann man daraus ziehen? Dieser Frage wollen die folgenden Ausführungen anhand von Beispielen nachgehen.

1. Zur Natur mathematischen Wissens

Die nachfolgende Zeichnung (Abb. 1) kann man als Veranschaulichung für die Bruchrechenaufgabe $\frac{1}{4}+\frac{2}{5}=\frac{13}{20}$ interpretieren.



$$\frac{1}{4}+\frac{2}{5}=\frac{5}{20}+\frac{8}{20}=\frac{13}{20}$$

Abb. 1

Ein Viertel des Fliesenteppichs lässt sich gut durch einen horizontalen, ein Fünftel durch einen vertikalen Streifen darstellen. Die entstehende Summenfläche kann man mit den einzelnen Fliesen ausmessen, von denen jede ein Zwanzig-

[1] S. etwa die Ausführungen zum genetischen Prinzip bei Wittmann (1981).

stel der Gesamtfläche ausmacht. Dabei müssen die beiden Überlappungsquadrate doppelt gezählt werden. Das ergibt insgesamt $\frac{13}{20}$.

Diese Erläuterungen zeigen bereits, dass ein veranschaulichendes Bild einen mathematischen Zusammenhang nicht von sich aus offenbart. Es kann den Gedankengang zwar unterstützen, erspart den Betrachtenden aber nicht die Leistung, die Figur in Gedanken zu strukturieren und zu deuten[2]. Mathematisches Verstehen ist ein konstruktiver Akt, der sich im Spannungsfeld zwischen Ablesen und Hineinlesen bewegt.

Mathematische Begriffe und Verfahren sind verschieden von den Bildern, die sie veranschaulichen, und den Symbolen, die sie beschreiben (vgl. Steinbring 1998). Sie entstehen in der Auseinandersetzung mit der erfahrbaren Wirklichkeit oder in der gedanklichen Weiterentwicklung und haben eine ideale Seinsform, die den Charakter von geistigen Entwürfen trägt (Heidegger 1962). In der physischen Welt gibt es Gegenstände oder Mengen von Gegenständen, die wir nach Zahl und Größe vermessen. Der Bruch $\frac{2}{5}$ ist ein gedanklicher Entwurf, durch den wir in begründbarer Weise festsetzen, als was wir ein bestimmtes Zahlen- oder Größenverhältnis ansehen wollen.

Insofern haben mathematische Ideen und Verfahren einen theoretischen Charakter. Es handelt sich um gedankliche Entwürfe und Konstruktionen, mit denen man die Wirklichkeit deuten und gestalten kann. Damit sind sie auch verschieden von allen ihren bildhaften, symbolischen oder sprachlichen Darstellungen. Ihre Vermittlung ist jedoch an solche Darstellungen gebunden. Die verbleibende prinzipielle Kluft zwischen Idee und Darstellung kann letztlich nur das lernende Individuum durch eine konstruktive gedankliche Leistung überwinden. Hierin steckt ein didaktisches Dilemma, das die nachfolgende Weiterführung des o. g. Beispiels aus der Bruchrechnung sinnfällig belegen mag.

---

[2] Vgl. hierzu die Ausführungen zum Problem der Veranschaulichung in Bauersfeld (1983).

Wenn $\frac{1}{4}+\frac{2}{5}=\frac{5}{20}+\frac{8}{20}=\frac{13}{20}$ richtig ist, dann gelangt man im Analogieverfahren zu $\frac{3}{4}+\frac{2}{5}=\frac{15}{20}+\frac{8}{20}=\frac{23}{20}$. André, Schüler einer siebten Hauptschulklasse, beherrscht die Additionsregel korrekt, und es gelingt ihm auch noch die Übertragung auf eine entsprechende Maßzahlgleichung mit der Einheit Dezimeter. Einer Fallstudie von Hasemann (1986, 1987) entnehmen wir eine so überraschende wie didaktisch aufschlussreiche Irritation der als konsolidiert erscheindenden Rechenfähigkeit in dem Moment, als der Interviewer das Zahlenmaterial in ein Flohzirkusmilieu hineinträgt (Hasemann 1986, S. 55):

In einem Flohzirkus springt ein Floh zuerst $\frac{3}{4}$ m weit, dann springt er $\frac{2}{5}$ m weit. Wie weit ist der Floh insgesamt gesprungen?

A: Der gleiche Hauptnenner, das sind 20. Das mal 5 sind $\frac{15}{20}$, sind $\frac{8}{20}$, sind $\frac{23}{20}$.

I: Hm, schreib das mal hin.

A: $\frac{23}{20}$ . . . nee, das kann ja nicht sein.

I: Wieso nicht?

A: . . . (5sec) . . . Der ist ja nicht 23 m gesprungen, sondern nur 5 m . . . 5 von 9 m . . . (5sec) . . . Er ist $\frac{5}{9}$ gesprungen.

I: Schreib das mal hin . . . (8sec) . . . Kannst du das nochmal erklären, wie du auf $\frac{5}{9}$ gekommen bist?

A: Indem ich es addiert habe: 3 plus 2 sind 5, 4 plus 5 sind 9 . . . sind es Neuntel. Nee . . . doch . . . (10 sec) . . .

I: Aber du hast doch eben hier auch addiert. Da siehst du doch, dass das dieselben Zahlen sind. Hier steht nur „m" und da „dm". Wenn du dir hier „m" hindenkst, dann hast du eben gerechnet: $\frac{3}{4}m+\frac{2}{5}m=\frac{23}{20}m$. Das hattest du eben hier (bei c)) auch ausgerechnet.

S: Ja.

I: Und jetzt sagst du, das ($\frac{23}{20}$ m) kann nicht sein?

A: Ja, weil hier . . . Das kann aber nicht sein. Das ist unmöglich, der springt nicht so weit. Der springt ja nicht $\frac{23}{20}$ m, 23 m von 20. Hier musst du nämlich kein Hauptnenner suchen wie oben.

Man würde zunächst erwarten, dass André das bereits errechnete Zwischenergebnis übernimmt, etwa mit der Begründung: das ist doch dasselbe wie oben, nur mit Metern, also sind es $\frac{23}{20}$. Indessen zeigen empirische Befunde, dass vielen Schülerinnen und Schülern die Interpretation von Bruchzahlen in Anwendungssituationen große Probleme bereitet (s. etwa Hasemann 1986, 1993; Padberg 1995). So auch hier.

André beginnt, neu zu rechnen. „Der gleiche Hauptnenner, das sind 20. Das mal 5 sind $\frac{15}{20}$, sind $\frac{8}{20}$, sind $\frac{23}{20}$". Man hat den Eindruck, dass André sich zwar an den bereits ausgeführten Rechnungen orientiert, dass er sich aber ihrer Gültigkeit auch in dieser Situation neu vergewissern muss. Das zeigt, dass die Bruchrechnung für André noch an Erfahrungsbereiche gebunden ist und die Abstraktion, die eine situationsübergreifende Strukturgleichheit von Zahlbeziehungen erkennt und automatisiert, noch nicht voll geleistet ist (vgl. Bauersfeld 1983)[3)].

Als André nun vom Interviewer gebeten wird, seine Rechnung schriftlich zu fixieren, zeigt sich, dass die hoffnungsvollen Ansätze der Vergewisserung brüchig sind: „$\frac{23}{20}$, nee, das kann ja nicht sein.... Der ist ja nicht 23 m gesprungen, sondern nur 5 m .... 5 von 9 m .... er ist $\frac{5}{9}$ gesprungen". Offenbar beginnt André, sein Ergebnis an der zugrundeliegenden Situation zu testen, und daraufhin erscheint es ihm nicht mehr plausibel. Entscheidend ist die Deutung der Größe $\frac{23}{20}$. André interpretiert sie als „23 m von 20", was dem Bruchteil $\frac{23}{20}$ von 20 Metern

---

3) Man kann diese Beobachtung einerseits als Desiderat einer noch zu vervollkommenden Zahlbegriffsentwicklung werten, andererseits aber auch als Ausdruck mentaler Gesundheit, die André vor dem blinden Vertrauen auf eingeübte Rechenschemata bewahrt.

entspräche, und nicht, den Konventionen folgend, als „$\frac{23}{20}$ von einem Meter", was nur etwas mehr als 1 m ausmacht. Mit 23 m aber ist ein winziger Floh überfordert: „Das ist unmöglich, der springt nicht so weit. Der springt nicht $\frac{23}{20}$ m, 23 m von 20". Was liegt näher, als den Fehler in der Rechnung zu suchen: „Hier musst nämlich keinen Hauptnenner suchen wie oben". Und in der Tat, wenn André seine „von" - Deutung der Längenangaben konsequent durchhält, dann gelangt er ganz natürlich zu folgender Überlegung: Der Floh springt zuerst 3 von 4 Metern und dann nochmal 2 von 5 Metern, und das ergibt insgesamt 5 von 9 Metern. In schematischer Anwendung liefe dieses Verfahren auf eine „komponentenweise" Addition von Brüchen nach der Regel „Zähler plus Zähler, Nenner plus Nenner" hinaus, wie sie ohnehin gerne von Schülerinnen und Schülern angenommen wird (vgl. Padberg 1995). Damit wäre allerdings das Prinzip der Bezugnahme der Bruchteile auf dieselbe Referenzgröße, das die Hauptnennerbildung motiviert, preisgegeben.

Oft sind es die Fehler mit Esprit, die die fachdidaktische Erkenntnisbildung vorantreiben. Andrés Überlegungen verweisen an die gesamte Aspektfülle des Bruchzahlbegriffs. Zwar kann man nicht unbedingt annehmen, dass André mit demselben Grad an Reflexion und Bewusstheit vorgeht, mit der die oben vorgeschlagene Interpretation die subjektive Plausibilität seiner Gedankenführung nachzuzeichnen versucht[4)]. Dennoch macht die Episode einen wesentlichen Grundzug mathematischer Wissensbildung deutlich: mathematisches Verstehen schärft sich in einem dynamischen Wechselspiel zwischen Begriffsbildung, symbolischer Darstellung und situationsspezifischen Deutungen. Dieser Prozess ist ein notwendiges Durchgangsstadium für die Ausbildung stabilen Wissens und zugleich von je eigenen Vorläufigkeiten, Sichtbeschränkungen und Brüchigkeiten bedroht. Damit aber ist fachdidaktische Forschungs- und Entwicklungsarbeit an drei Dimensionen verwiesen, die idealtypisch für sich und in ihrer Wechselwirkung betrachtet werden können.

---

4) Manchmal bestehen die Auslöser für Schülerüberlegungen nur in punktuellen Signalen. So nimmt etwa Hasemann (1987) an, dass in Andrés Vorstellung zunächst einfach die 23 m in der Größenangabe $\frac{23}{20}$ m dominieren.

2. Dimensionen fachdidaktischer Reflexion

Wenn man sich die Episode von André und dem Flohzirkus eingebettet in einen schulischen Lehr-Lernprozess vorstellen und z. B. über eine angemessene Lehrerreaktion nachdenken will, dann muss man mindestens drei Komponenten des Geschehens in Betracht ziehen: die Natur des zu vermittelnden Wissens, die lern- und kognitionspsychologischen Bedingungen für seinen Erwerb und eine diesen beiden Komponenten Rechnung tragende unterrichtsmethodische Umsetzung.

2.1 Die fachlich-epistemologische Dimension

Es ist weitgehend unbestritten, dass gute Fachkenntnisse als notwendige Voraussetzung für die effiziente Erteilung von Fachunterricht gelten können. Demnach lautet die Schlüsselfrage „Was sind und was sollen die Bruchzahlen?", wie wir sie seit Dedekind (1888) in dieser Formulierung zu stellen gelernt haben. Dedekind und seine Zeitgenossen suchten die Antwort in der Angabe von Verfahren, wie man, ausgehend von der als gegeben betrachteten Menge der natürlichen Zahlen, die erweiterten Zahlbereiche hieraus mit begrifflichen Ausdrucksmitteln wie Mengen, Relationen und Operationen erzeugen kann. Danach könnte man die Bruchzahlen beispielsweise auffassen als Äquivalenzklassen von Paaren natürlicher Zahlen mit geeignet definierten Operationen - ein Zugang, der einer universitären Vorlesung zum Aufbau des Zahlensystems angemessen ist und die Schulmathematik i. S. Felix Kleins „vom höheren Standpunkt" (Klein 1908) beleuchtet.

Im Diskurs mit André hilft uns dieser höhere Standpunkt allein nicht weiter. Er muss durch eine ganz bestimmte Art von Tiefenschärfe ergänzt werden. Daher hat Freudenthal (1983) in seinem Buch „Didactical Phenomenology of Mathematical Structures" gefordert, dass man in der didaktischen Analyse die mathematischen Ideen, Begriffe und Strukturen befragen sollte auf ihre Beziehung zu den Phänomenen, zu deren Beschreibung sie entwickelt wurden; diese können physischer, sozialer oder bereits mentaler Natur sein. Deshalb wurde in der Abschnittsüberschrift das Prädikat „fachlich" durch den Zusatz „epistemologisch" ergänzt. Damit wird der Blick ausgeweitet auf die Frage nach der Genese mathematischen Wissens und deren wissenschaftstheoretischer Charakterisierung, eingedenk der Erfahrung, dass mathematisches Verstehen sich im Wechselspiel zwischen Begriffsbildung und Phänomenbetrachtung schärft und nicht schon auf der formal-abstrakten Ebene einsetzen kann.

In Andrés Fall wäre also u.a. zu fragen:

- Wie verhält sich der Bruch $\frac{2}{5}$ zu seinen beispielhaften Verkörperungen?
- Welche geistigen Werkzeuge, die die mathematische Wissensbildung steuern (z.B. Abstrahieren, Idealisieren...), sind zur Ausbildung des Bruchzahlbegriffs notwendig?

„Bruch" kommt von „Brechen"; diese Wurzel findet man in vielen Sprachen nach dem Vorbild des lateinischen „fractio". Bleibt bei der Gleichverteilung etwas übrig, so muss mit dem Rest etwas geschehen. Wenn die Einheit in Stücke gebrochen wird, entstehen Brüche. Der Fachbegriff „rationale Zahl" ist demgegenüber weniger gewalttätig. Er ist aber nicht im Sinne von rational = vernünftig im Gegensatz zu irrational = unvernünftig zu verstehen; vielmehr hat in der mathematischen Fachsprache das lateinische „ratio" die Bedeutung von „Verhältnis" erworben. Wenn zwei Stäbe sich der Länge nach wie 2 : 5 verhalten, so beträgt die Länge des einen $\frac{2}{5}$ von der Länge des anderen, kurz: der eine ist $\frac{2}{5}$ mal so lang wie der andere. Das kann man auch einsehen, ohne die Stäbe zu zerbrechen (vgl. Freudenthal 1986).

Diese Überlegungen deuten an, dass Brüche viele Gesichter haben.Wer Brüche verstehen will, muss diese Gesichter angeschaut und ihre jedewede Eigenart wie ihre Verwandtschaft erkannt haben. Die fachdidaktische Literatur klassifiziert diese Gesichter nach gemeinsamen „Grundvorstellungen" (vom Hofe 1995), also nach Modellvorstellungen, die die Beziehung zwischen Beispielsituation und Begriff auf einer mittleren Abstraktionsstufe beschreiben.

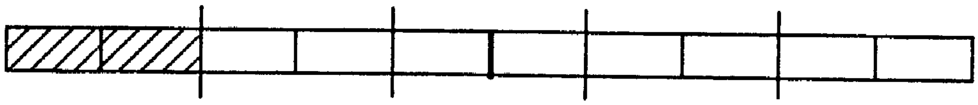
Für den Bruch $\frac{2}{5}$ lassen sich, bezogen auf den Größenbereich der Längen, folgende Grundvorstellungen ausmachen (vgl. Hefendehl-Hebeker 1996):

Der Bruch $\frac{2}{5}$ kann beschreiben:

- einen Teil eines Ganzen

2-mal der 5. Teil der Einheitsstrecke

- einen Teil mehrerer Ganzer

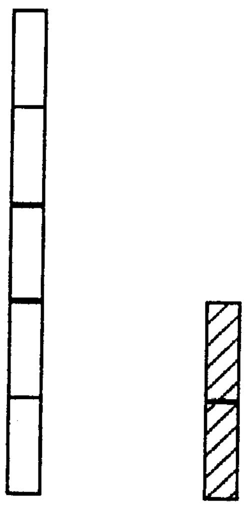


Das 2-fache einer Einheitsstrecke, eingeteilt in 5 gleiche Teile, hat wieder $\frac{2}{5}$ der Einheitsstreckenlänge.

- ein Zahlen- oder Größenverhältnis in einer ggf. auch unbegrenzt gedachten Gesamtheit

Je 2 von 5 Metern macht $\frac{2}{5}$ der Gesamtlänge.

- eine Vergleichssituation



Der zweite Stab ist $\frac{2}{5}$ mal so lang wie der erste.

In diesen Grundvorstellungen haben wir es mit verschiedenen Weisen zu tun, Anteile auf eine Gesamtheit zu beziehen. Dieses In-Beziehung-Setzen erfordert die Fähigkeit zum strukturierenden Sehen und zur quantitativen Präzisierung. Dabei ergibt sich, dass alle dargestellten Situationen durch das Zahlenverhältnis 2 : 5 beschrieben werden können. Den Vorgang des Gleichwertig-Erachtens hinsichtlich bestimmter Aspekte und des begleitenden Absehens von anderen Aspekten nennen wir Abstraktion. Zahlbegriffsbildung ist immer wesentlich eine Abstraktionsleistung.

Diese gedankliche Leistung übersteigt das bloße Abarbeiten eines Rechenschemas wie $\frac{3}{4}+\frac{2}{5}=\frac{15}{20}+\frac{8}{20}=\frac{23}{20}$, sollte aber im Mathematikunterricht eigentlich angestrebt werden. Es ist eine theoretische Leistung, denn mathematische Ideen, Begriffe und Verfahren haben einen theoretischen Charakter. Es handelt sich um gedankliche Entwürfe und Konstruktionen, mit denen man die Wirklichkeit deuten und gestalten kann.

Damit aber hat man es mit drei Aspekten und ihrer jeweiligen Wechselwirkung zu tun:

- den Phänomenen, die es nach Zahl, Form oder Struktur zu erfassen gilt;
- den mathematischen Begriffen, mit deren Hilfe das geschieht;
- und der Zeichensprache, die zu ihrer Darstellung verwendet wird.

Erst die Erfassung dieser Aspekte in ihrem Zusammenspiel erzeugt volles mathematisches Verständnis. Das sei noch einmal an einem Beispiel aus dem Analysis-Unterricht verdeutlicht (vgl. Blum & Kirsch 1996, Hefendehl-Hebeker 1998).

Die Ableitung des Kreisflächeninhaltes πr^2 nach dem Radius r ergibt den Umfang $2\pi r$. Der formale Ableitungskalkül produziert dieses Ergebnis unmittelbar, vermittelt aber bei rein schematischer Anwendung keinen tieferen Einblick in den Zusammenhang. Dazu bedarf es einer Begründung, die den Ableitungsbegriff situationsspezifisch deutet und damit sowohl das Verständnis des allgemeinen Begriffs wie des speziellen Beispiels bereichert und die etwa so aussehen könnte:

Die Ableitung einer Funktion an einer Stelle beschreibt deren momentane Wachstumstendenz an dieser Stelle (Fischer 1976). Also lassen wir den Kreis wachsen, indem wir ihn von innen heraus aufblasen (Abb. 2):

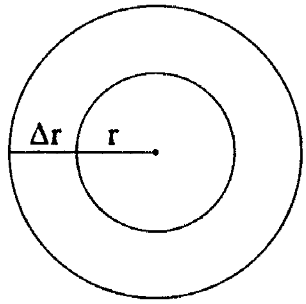


Abb. 2

Der Zuwachs des Flächeninhalts im Intervall $[r, r+\Delta r]$ wird durch die Differenz der Funktionswerte an den Intervallenden beschrieben: $\pi(r+\Delta r)^2 - \pi r^2$. Dividiert man diese Differenz durch die Intervallänge, so erhält man den durchschnittlichen Zuwachs pro Längeneinheit. Dieser wird im vorliegenden Beispiel repräsentiert durch den Umfang der Mittellinie des Kreisringes, wie eine Umformung des Differenzenquotienten bestätigt:

$$\frac{\pi(r+\Delta r)^2 - \pi r^2}{\Delta r} = 2\pi r + \pi \Delta r = 2\pi(r + \frac{1}{2}\Delta r).$$

Der Grenzübergang verwandelt schließlich die mittlere Änderungsrate in einem Intervall in die lokale Änderungsrate oder lokale Wachstumstendenz an einer Stelle, hier repräsentiert durch den Kreisumfang, den man auch als Kreisring von infinitesimal kleiner Breite interpretieren kann.

Mit diesen Beispielen und Überlegungen aber sind Vollzüge angesprochen, die die Frage nach der lern- und kognitionspsychologischen Dimension des Lernprozesses auf den Plan rufen.

2.2 Die lern- und kognitionspsychologische Dimension

Hier geht es um Fragen wie die folgenden:

- Wie entsteht Wissen - oder, mit Wagenschein gesprochen: Wie kommt die Natur dazu, uns ihr Wissen zu offenbaren?
- Wie ist Wissen intern repräsentiert? Was ruft das Symbol $\frac{2}{5}$ in unserem Kopf ab, wie also sind interne Vorstellungen und externe Darstellungen aufeinander bezogen?
- Wie lassen sich Wissensbildungsprozesse beeinflussen? Gibt es geeignete Hilfestellungen und Denkanstöße, mit denen man bei André den gewünschten Abstraktionsprozess unterstützen kann?

Unter den aktuellen Antworten, die dazu zur Verfügung stehen, gibt es zwei zueinander komplementäre Akzentsetzungen, die konstruktivistische und die kognitionspsychologische (vgl. Sjuts 1999).

Die konstruktivitische Akzentsetzung besagt: Wissen lässt sich nicht einfach auf dem Wege der Mitteilung weitergeben, die lernende Person hat Wissen selbst aufzubauen. Dabei wird die geistige Konstruktion möglichst so angepasst, dass sie sich in der Auseinandersetzung mit der Umwelt bewährt. Fundiert wird diese Position auch durch neurophysiologische Ergebnisse, die auf Maturana (1982) zurückgehen. Ihnen zufolge hat die Aktivität des Nervensystems im wesentlichen mit internen Beziehungen zu tun. „Keine Instruktion von außen kann .... vorhersagen oder determinieren, was in einem anderen Subjekt kognitiv als Folge der Instruktion passieren wird. Die Umwelt löst in einem Subjekt nur Perturbationen aus, die es zu Kompensationsreaktionen anregen" (Müller 1996). Kann aber das Nervensystem nur pertubiert werden, so lässt es sich nicht von außen in zwingender Eindeutigkeit beeinflussen. Vorrangig die innere Strukturverfasstheit erlaubt innere Zustandsveränderungen.

André verarbeitet seine Aufgabe im Kontext seines Wissens über Brüche, aber auch in der Auseinandersetzung mit seinen Vorstellungen vom Geschehen in einem Flohzirkus. Die Interaktion mit dem Interviewer kann dazu führen, dass die dabei auftretenden Inkonsistenzen schließlich behoben werden. Deshalb hat die konstruktivistische Sicht eine positive Einstellung zu Fehlern: sie werden nicht so sehr als Ausdruck von Versagen und Misserfolg betrachtet, sondern eher als Zwischenstadien oder Begleiterscheinungen in einem Lernprozess.

Die kognitionspsychologische Akzentsetzung betont die Herausbildung mentaler Modelle, durch die Wissen intern repräsentiert wird. Man vermutet, dass diese zunächst aus einer ganzheitlichen Verarbeitung erwachsen und entsprechend komplex sind. Lernen besteht dann in der Vervollkommung solcher Modelle, „die durch absichtsvolles, zielorientiertes Handeln in situativen Kontexten ausgebaut, verfeinert und mit abstrakten Wissensstrukturen verbunden werden müssen" (Ruwisch 1999, S. 87).

Wichtig ist, dass dabei solche Vorstellungen aufgebaut werden, die sich durch große Tragfähigkeit und stete Benutzbarkeit auszeichnen. Die oben geschilderten Grundvorstellungen zum Bruchzahlbegriff könnten solchen Modellcharakter besitzen.

Diese Akzentsetzungen begründen aber gleichzeitig ein Spannungsverhältnis: Lernprozesse sind einerseits offen, weil sie auf individuellen Bedeutungskonstruktionen basieren, sollen andererseits aber objektivierbares Wissen erzeugen, was die Frage nach geeigneten Steuerungsmechanismen aufgreift. Diese betrifft die unterrichtsmethodische Dimension.

2.3 Die unterrichtsmethodische Dimension

Um dem Geheimnis einer fruchtbaren Balance zwischen Steuerung und Offenheit näher zu kommen, seien die geschilderten Auffassungen vom Lernen noch einmal mit den plastischen Metaphern der Programmschrift „Mathe 2000" des Instituts für Didaktik der Mathematik in Dortmund zusammengefasst.

„Früher hat man Lernen aufgefasst als das Bauen einer festgefügten Mauer, bei der nach einem vorgegebenen und genau überwachten Plan von unten her Baustein neben Baustein und Schicht auf Schicht gesetzt wird („lineares Denken").

Dabei wurde peinlich darauf geachtet, keinen Wissensbaustein auszulassen, weil man befürchtete, Lücken könnten den weiteren Anbau von Steinen unmöglich machen.

Heute weiß man, dass Lernen von Natur aus ganz anders verläuft: Es besteht im fortlaufenden Knüpfen und Umstrukturieren eines flexiblen Netzes aus Wissenselementen und Fertigkeiten, wobei es die Lernenden selbst sind, die - unterstützt durch geeignete Lernumgebungen - ihre Wissensnetze von verschiedenen Stellen aus aktiv-entdeckend weiterknüpfen („vernetztes Denken"). Lücken an einer Stelle sind keineswegs ein Hindernis für den Ausbau des Netzes an einer anderen Stelle. Sie werden im Laufe des Lernprozesses geschlossen, indem über die Lücken hinweg „Wissensfäden" gespannt und an den schon festeren Teilen des Netzes verankert werden" (Müller u. a. 1997, S. 21f).

Der Mathematikunterricht ist besonders anfällig für linear organisierte Lernstrukturen, weil fachliche Strukturen diese hier zusätzlich begünstigen, erfolgt doch die saubere Darstellung fertiger Wissensbestände diesem Schema. Daher arrangiert der traditionelle fragend-entwickelnde Mathematikunterricht den Lehrstoff überwiegend in einer linearen Gedankenkette, an der er die Lernenden durch eine wohl arrangierte Fragetechnik entlang zu führen versucht. Allerdings unterliegt diese Methode bereits aus fachlichen Gründen einer Illusion; die Lehrkraft handelt aus der Perspektive gefestigten Wissens, die Lernenden sollen dieses aber erst erwerben. Deshalb können sie die Fragen oft gar nicht so wahrnehmen, wie sie gemeint sind. Zusätzlich ist das Prinzip des vernetzten Denkens verletzt.

Der Unterschied zwischen diesen beiden Lehr- und Lernformen sei noch einmal an einem Beispiel deutlich gemacht. Es geht um die Einführung der Punktspiegelung und ihre Darstellbarkeit als zweifache Achsenspiegelung.

Im Rahmen eines Unterrichrichtspraktikums in der 7. Klasse erfolgte eine solche Einführung in sehr linearer Weise, weil sie mit einer entsprechenden Vorstrukturierung gestaltet war. Die Schüler/innen, die die Achsenspiegelung bereits kannten, bekamen Spielkarten ausgeteilt. Die Betrachtung ergab sehr schnell, dass die Bildteile „immer irgendwie symmetrisch" seien, „aber nicht ganz genau" denn die in der Bildmitte verlaufende Achse „ist nicht genau die Spiegelachse".

Die Lehrkraft bestätigte die Beobachtungen und formulierte einen neuen Ausblick: „Es hat etwas mit Symmetrie zu tun. Aber wir kommen mit einer einzigen Achsenspiegelung nicht aus". Sie signalisierte damit den Schülerinnen und Schülern, dass ihre Deutungsansätze sinnvoll waren, wies den Überlegungen dann aber eine Richtung, die nur aus der Perspektive der Fachkundigen voll gewürdigt werden kann. Was es bedeutet „mit einer Achsenspiegelung nicht auszukommen", kann man erst ermessen, wenn man schon mal gesehen hat, dass Abbildungen als Mehrfachspiegelungen darstellbar sind.

Diese Einsicht wurde unverzüglich durch ein Arbeitsblatt angebahnt (Abb. 3).

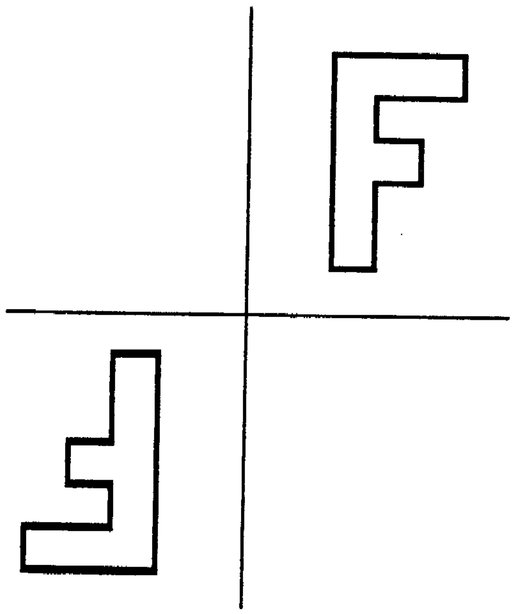


Abb. 3

„Wie kann durch Achsenspiegelungen das obere *F* in das untere *F* überführt werden? Der Auftrag war für die Schüler/innen einfach zu bearbeiten, reduzierte aber die Aspektfülle des Einstiegsbeispiels in zweifacher Weise:

- die reichhaltigen farbigen Bilder des Kartenspiels wurden durch einfache geometrische Figuren ersetzt,
- die Erscheinungsformen der Punktspiegelung wurden durch strukturierende Vorgaben auf den einen angestrebten Aspekt reduziert, nämlich: die Verkettung von zwei Achsenspiegelungen an zueinander senkrechten Achsen.

Damit war dem „fortlaufenden Knüpfen und Umstrukturieren eines flexiblen Netzes aus Wissenselementen" eine verengende Einbahnstraße gewiesen.

Das letzte Ziel der Stunde sah vor, den Zusammenhang der Bildteile einer punktsymmetrischen Figur ohne Umweg über das Zwischenbild unter einer zweifachen Achsenspiegelung zu beschreiben. Durch nochmalige Reduktion auf die Betrachtung eines einzigen Punktes sollte der Zusammenhang zwischen zweifacher Achsenspiegelung, 180^0-Drehung und Punktspiegelung im unmittelbaren Sinne deutlich gemacht werden (Abb. 4).

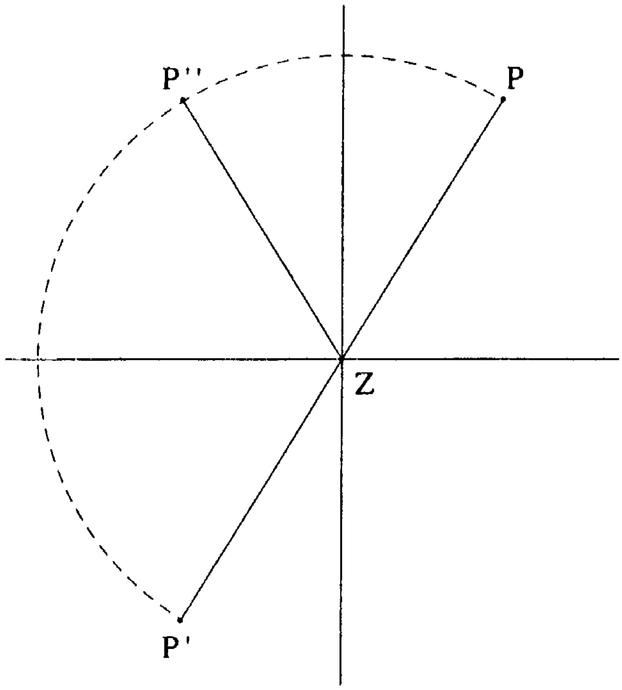


Abb. 4

Im Verlauf der Stunde ließ die Lebendigkeit der Beteiligung spürbar nach. Es war Mathematikunterricht wie immer mit Anweisungen und Ausführungen, aber nicht aufregend. Man tat, was verlangt wurde - wer garantierte jedoch, dass sich die einzelnen Schritte erkennbar zu einem sinnvollen Ganzen zusammenfügten?

In der Nachbesprechung der Stunde wurde daher ein Gedankenexperiment angestellt, wie man im Umgang mit dem Thema Punktspiegelung dem Prinzip des vernetzten Denkens stärker Rechnung tragen kann. Die Spielkarten enthalten den ganzen Formenreichtum der Punktspiegelung (Abb. 5). Deshalb kann man daran verschiedene Möglichkeiten erarbeiten, die Bildteile in Beziehung zu setzen. Eine anschließende systematisierende Betrachtung kann diese Möglichkeit dann in eine logische Ordnung bringen. Dazu die folgende Gedankenskizze:

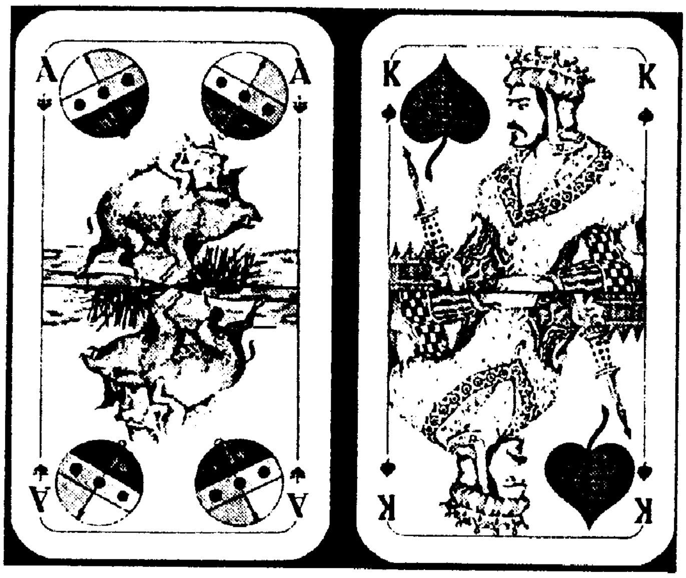


Abb. 5 (Barth u.a. 1985, S. 124)

Die Herz-König-Karte hat mit einem achsensymmetrischen Bild gemeinsam, dass sie aus zwei gleichen, durch eine gerade Linie getrennten, Bildhälften besteht. Symmetrie ist die Wiederkehr des Gleichen am anderen Ort (Eschenburg & Hefendehl 1999). Die Spiegelung an der angedeuteten Achse bringt die Bildhälften noch nicht zur Deckung - sie würden danach immer noch seitenverkehrt zueinander liegen, aber das könnte man durch eine weitere Achsenspiegelung beheben.

Die Betrachtung der zweiten Karte in Abb 5 suggeriert, dass die Bildteile in einem Punkt zusammenlaufen. Nach Auseinanderschneiden an der angedeuteten Trennkurve verifiziert man, dass eine Halbdrehung um diesen Punkt die entstandenen Bildteile miteinander zur Deckung bringt. Hat man diese Möglichkeit erst einmal gefunden, kann man sich vorstellen, dass sie auch bei dem Herz-König-Bild funktioniert. Beide Abbildungsmethoden lassen sich nun an anderen punktsymmetrischen Bildern erproben.

An einer Strategie zur Durchleuchtung des systematischen Zusammenhanges zwischen den Abbildungsverfahren lassen sich nun die Schüler/innen beteiligen, sofern beim Studium der Achsenspiegelung klar geworden ist, dass zum systematischen Geometrie-Treiben die gezielte Betrachtung einzelner Punkte dienlich ist. Hier hätte die Beweisskizze aus Abb. 4 ihren systematischen Ort.

Dieses Beispiel und die vorausgeschickten Elemente einer Lerntheorie des vernetzten Denkens beinhalten eine Absage an straff strukturierte Unterrichtsgänge, die die Schüler/innnen an einer vorstrukturierten, kleinschrittig und linear organisierten Gedankenkette entlang zu führen versuchen. Das ist aber keine Absage an unterrichtliche Vorgaben generell. Vielmehr kommt es darauf an, Lernumgebungen zu schaffen, in denen die geistige Konstruktionstätigkeit angeregt und zur Auseinandersetzung herausgefordert wird, die aber gleichzeitig Orientierungen vermitteln.

„Kinder können ihr mathematisches Wissensnetz nicht völlig aus sich heraus knüpfen. Sie benötigen vielmehr geeignete fachlich strukturierte Lernumgebungen, die sie anregen, ihnen geistige Anstrengungen abverlangen und ihnen vor allem auch Zugang zu den objektiv gültigen Wissensnetzen des Faches einschließlich der üblichen Fachausdrücke verschaffen" (Müller u.a. 1997, S. 21 f).

Als methodische Leitlinie für die Organisation solcher Lernumgebungen empfiehlt Wittmann das von den Management-Wissenschaften entlehnte „systemisch-evolutionäre Paradigma der Menschenführung" (a.a.O). Danach kommt der Lehrkraft die Aufgabe zu, die Eigenaktivität in komplexen Lernsituationen zu fördern und Hilfe zur Selbsthilfe zu leisten. Das geschieht durch stützende Handlungen:

- Ziele setzen und Orientierungspunkte schaffen;
- Einsicht in die Ziele wecken;
- der Eigenaktivität für die Erreichung der Ziele Raum geben;
- gezielte Reflexionen zur Regulierung der geistigen Aktivität anregen.

Wesentlich dabei ist die Moderationsfähigkeit der Lehrkraft, die zugleich Offenheit aushalten und Klarheit schaffen sollte. Das erfordert eine sensible Wahrnehmung für Schüleräußerungen, aber auch eine epistemologische Sicht der

Mathematik, die die Entwicklung und Struktur des Wissens und dessen inneren Aspektreichtum berücksichtigt.

Man sollte diese Maßgaben jedoch nicht leichtfertig Sozialformen des Unterrichts zuordnen. Weinert (1998) stellt heraus, dass Fachunterricht sowohl systematisch-symbolisches wie situiert-anwendungsbezogendes Wissen vermitteln muss. Für die erste Wissensform empfiehlt er eine direkte Unterweisung, die lehrergesteuert, aber zugleich schülerorientiert vorgeht. Für den Erwerb situierter Strategien der Wissensnutzung werden Projekte, Lernteams sowie vielfältige und variable Übungs- und Anwendungssituationen empfohlen.

Abschließend sei noch ein Unterrichtsbeispiel geschildert, das die genannten Prinzipien auf ganz natürliche Weise umsetzt (Winning 1998, vgl. Hefendehl 1999). Inhaltlich geht um Teilbarkeitskriterien und damit um ein Unterrichtsthema der Klassen 4 und 5.

3. Anstöße

Auf einem Übungsblatt zum schriftlichen Dividieren sind die Aufgaben so angeordnet, dass die Reste schöne Folgen bilden. Bei den ersten vier Aufgaben stimmen sie mit der Aufgabennummer überein:

(1)	4798 : 9 =	(2)	1361 : 3 =
(3)	6235 : 4 =	(4)	9466 : 6 =
(5)	4319 : 5 =	(6)	6524 : 8 =
(7)	3176 : 2 =	(8)	6342 : 4 =
(8)	3280 : 6 =	(10)	3581 : 8 =

Daher äußern einige Kinder während des Rechnens laut ihre Vermutung: „Das geht bestimmt so weiter - bei Aufgabe 5 kommt Rest 5 raus, bei Aufgabe 6 Rest 6 und immer so weiter." Indessen erhebt Andreas einen berechtigten Einwand: „Das kann nicht sein, dass bei Aufgabe 5 Rest 5 rauskommt! Da ist : 5, und da gehen die Reste nur bis 4." Der Blick für die sich ergebenden Reste ist geschärft.

Die Kinder versuchen nun, vor dem Rechnen zu raten, welcher Rest sich wohl bei der nächsten Aufgabe ergeben wird. Nachdem das Aufgabenblatt bearbeitet ist, beteiligt sich die Lehrerin an dem Reste-Ratespiel. „Ich kann Reste gut raten," behauptet sie und schreibt eine unvollständige Divisionsaufgabe an die Tafel:

_______ : 9 = _______ R. _______

Sie fordert die Kinder auf, eine Zahl zu nennen, die geteilt werden soll, und behauptet, dass sie den Rest raten kann. Die Kinder wollen es ihr schwer machen und nennen 7953. Sofort schreibt sie den Rest 6 hin. Die Aufgabe wird von einem Kind vorgerechnet. Die Spannung ist groß, ob sich wirklich der vorausberechnete Wert ergeben wird - und tatsächlich, die Lehrerin hat Recht. Die Kinder möchten das Spiel noch einmal sehen. Die nächste Aufgabe lautet 6278 : 4 = . „Rest 2" verkündet die Lehrerin nach kurzer Zeit. Die Kinder sind verblüfft, dass sie so schnell rechnen kann.
Am nächsten Tag wollen sie das Spiel fortsetzen. Die Lehrerin wandelt es leicht ab: „Ich sage, durch welche Zahl geteilt wird. Ihr könnte jetzt bestimmen, was für ein Rest rauskommen soll, und ihr dürft auch die ersten Ziffern der Ausgangszahl nennen. Ich schreibe dann die Einerziffer." Die Vorgabe lautet

479__ : 3 = ____ R 2.

Die Lehrerin notiert als Einziffer 0, und wieder stimmt das Ergebnis.

Bei der nächsten Aufgabe wählt die Lehrerin : 2. Zu vervollständigen ist

175__ : 2 = ____ R 1.

„Halt!" ruft Markus plötzlich: „Kann ich die Einerzahl schreiben?" Strahlend geht er zur Tafel und schreibt eine 3 an die Einerstelle. Die Kinder stimmen zu, einige sind noch skeptisch. Die anschließende Rechnung zeigt, dass Markus eine richtige Zahl gefunden hat. „Markus hätte auch eine 5 schreiben können." stellt Eva fest. „Ja, oder 1 oder 7 oder 9." ergänzt Nick. Juliane erkennt: „Hinten muss eine ungerade Zahl sein." Nach weiteren Beispielen wird ein gemeinsamer Merksatz formuliert.

Johannes hat auch eine Erklärung, warum man nur auf die Einerstelle zu achten braucht: „Die Zehner gehen sowieso durch 2, weil 5 · 2, das ist ja 10, und die Hunderter erst recht. Dann kommt's nur auf die Einer an."

Entsprechend der 2er-Regel wird nun eine 5er Regel erarbeitet. „Geht das bei allen Zahlen?" fragen die Kinder. Die Lehrerin schlägt vor, als Nächstes die Zahl 4 zu untersuchen. Schnell wird deutlich, dass es hier nicht mit einer Betrachtung der letzten Ziffer getan ist. Nachdem die Kinder eine Reihe von Zahlen auf 4er-Reste untersucht haben, steht eine Vermutung im Raum: „Immer wenn die letzten beiden in der 4er-Reihe sind, geht's auf." So wird für die Division durch 4 eine Endstellenregel gefunden und begründet und ebenso für die Division durch 8. Als Hinführung zur Quersummenregel dient ein Arbeitsblatt mit speziell zusammengestellten Aufgaben:

Was ist bloß hier los?

1.

7683 : 9 =	9435 : 9 =
8736 : 9 =	5394 : 9 =
3867 : 9 =	3459 : 9 =

2. Schreibe selbst solche Aufgaben-Päckchen!

3. Rechne, achte auf die Reste!

2000 : 9 =	4000 : 9 =
2003 : 9 =	4100 : 9 =
2103 : 9 =	4120 : 9 =
2123 : 9 =	4122 : 9 =

4. Schreibe : 9 - Aufgaben! Kannst du die Reste raten?

Die Komposition dieses wie auch der vorhergehenden Arbeitsblätter entspricht H. Winters Konzept vom kreativen Üben (Winter 1984): Man konstruiere Aufgabenserien, die mehrere Schichten haben - einen unmittelbaren Übungszweck (hier die Division mit Rest) und dazu eine innere Systematik, die auf weiterführende Einsichtigen verweist und deren eigentätige Umsetzung anregt. Auf diese Weise entstehen Herausforderungen für verschiedene Leistungsniveaus, und es wird „übend entdeckt und entdeckend geübt" (a.a.O). Das ist die kreative Alternative zum bloßen Abarbeiten von „Aufgabenplantagen", die aus isolierten Problemen bestehen.

Diese Unterrichseinheit behandelt weder ein ungewöhnliches, nicht im üblichen Stoffkanon vorgesehenes Thema, noch sprengt ihre Organisationsform den gegebenen institutionellen Rahmen, und doch wohnt ihr eine besondere Lebendigkeit inne.

Das Gelungensein der Stunde beruht auf einer fruchtbaren Spannung zwischen Anregungen zum Lernen und Freiräumen zum Denken auf eigenen Wegen, zwischen orientierenden Vorgaben und Spielräumen für eigene Einsichten, zwischen vorbereiteter Stufung der Schwierigkeiten und natürlichen Anlässen zum Weiterfragen. Man sieht, dass die Lehrerin die Struktur und Genese mathematischen Wissens als Leitlinie für ihren Unterricht verwenden kann.

Literatur

Bauersfeld, H.: Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und - Lehrens. In: H. Bauersfeld u. a.: Lernen und Lehren von Mathematik. Analysen zum Unterrichtshandeln II. Köln 1983, 1-56.

Barth, F.; Krumbacher, G.; Matschiner, E.; Ossiander, K.: Anschauliche Geometrie 1. München 1985.

Blum, W.; Kirsch, A.: Die beiden Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung. mathematiklehren Heft 78 (Oktober 1996) 60 – 65.

Dedekind, R.: Was sind und was sollen die Zahlen? Braunschweig 1988, 10. Aufl. 1965, Nachdruck 1969.

Eschenburg, J. H., Hefendehl-Hebeker, L.: Die Gleichung 5. Grades: Ist Mathematik erzählbar? Manuskript: Augsburg 1999.

Fischer, R.: Fundamentale Ideen bei den reellen Funktionen. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 8 (1976), 185 – 192.

Freudenthal, H.: Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht 1983.

Freudenthal, H.: Brüche. Basisartikel zum Themenheft „Brüche". mathematiklehren Heft 16 (Juni 1986) 4 - 7.

Hasemann, K.: Mathematische Lernprozesse. Analysen mit kognitionstheoretischen Modellen. Braunschweig, Wiesbaden 1986.

Hasemann, K.: Alternative Begriffe der Schüler und die Rolle begrifflicher Konflikte im mathematischen Lernprozess. Der Mathematikunterricht 33 (1987), H.1, 21-31.

Hasemann, K.: Missverständnisse beim Bruchrechnen - Missverständnisse der Division. Mathematik in der Schule 31 (1993), 2, 70-78.

Heidegger, M.: Die Frage nach dem Ding. Tübingen 1962.

Hefendehl-Hebeker, L.: Brüche haben viele Gesichter. mathematiklehren 78 (Oktober 1996) 20-22, 47-48.

Hefendehl-Hebeker, L.: Aspekte eines didaktisch sensiblen Mathematikverständnisses. Mathem. Semesterber. (1998) 45: 189-206.

Hefendehl-Hebeker, L: Elemente einer veränderten Kultur des Mathematikunterrichts. In: Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg (Hrsg.): Weiterentwicklung des mathematisch-natruwissenschaftlichen Unterrichts. Stuttgart 1999, 33 - 46.

Hofe, R. vom: Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Heidelberg, Berlin, Oxford 1995.

Klein, F.: Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus. Nachdruck der Auflage von 1925 (1. Aufl. 1908). Berlin, Heidelberg, New York 1968.

Maturana, H. R.: Erkennen: Die Organisation und Verkörperung von Wirklichkeit. Braunschweig, Wiesbaden 1982.

Müller, G. N.; Steinbring, H.; Wittmann, E. Ch.: 10 Jahre „mathe 2000". Bilanz und Perspektiven. Düsseldorf 1997.

Müller, K.: Erkenntnistheorie und Lerntheorie. Geschichte ihrer Wechselwirkung vom Repräsentationslismus über den Pragmatismus zum Konstruktivismus. In: Müller, K. (Hrsg.): Konstruktivismus. Lehren-Lernen-Ästhetische Prozesse. Neuwied, Kriftel, Berlin 1996.

Padberg, F.: Didaktik der Bruchrechnung. Gemeine Brüche - Dezimalbrüche. 2., erw. Aufl. Heidelberg, Berlin, Oxford 1995.

Ruwisch, S.: Angewandte Multiplikation: Klassenfest, Puppenhaus und Kinderbowle. Eine qualitative empirische Studie zum Lösungsverhalten von Grundschulkindern beim Bearbeiten multiplikativer Sachsituationen. Frankfurt a. M. 1999.

Sjuts, J.: Mathematik als Werkzeug zur Wissensrepräsentation. Theoretische Einordnung, konzeptionelle Abgrenzung und interpretative Auswertung eines kognitions- und konstruktivismus-theoriegeleiteten Mathematikunterrichts. Dissertation: Osnabrück 1999.

Steinbring, H.: Elements of Epistemological Knowledge for Mathematics Teachers. Journal of Mathematics Teacher Education 1, 1998 (2), 157 - 189.

Weinert, Franz E.: Neue Unterrichtskonzepte zwischen gesellschaftlichen Notwendigkeiten, pädagogischen Visionen und psychologischen Möglichkeiten. In: bayerisches Staatsministerium für Unterricht, Kultus, Wissenschaft und Kunst (Hrsg.): Wissen und Werte für die Welt von morgen. Donauwörth 1998, 101 - 125.

Winning, A.: Überlegungen zur schriftlichen Division: Reste-Raten. Manuskript, Kassel 1998.

Winter, H.: Begriff und Bedeutung des Übens im Mathematikunterricht. In: mathematik-lehren 2 (Februar 1984) 4 - 16.

Wittmann, E. Ch.: Grundfragen des Mathematikunterrichts. 6., neubearb. Aufl. Braunschweig 1981.